Einführung in das Arbeiten mit diesem Übungsmaterial

Der Lernweg macht den Unterschied

Kinder sollen mathematisch denken lernen. Dieses Ziel hat das hier vorliegende IntraActPlus-Lernmaterial mit den gängigen Ansätzen im Bereich Vorschule, Schule und Therapie gemeinsam. Es sind nicht die Ziele, die den Unterschied zwischen IntraActPlus und anderen Ansätzen machen – es ist der Lernweg.

In praktisch allen gegenwärtig gebräuchlichen Schulbüchern wird der Weg hin zum mathematischen Denken nicht ausreichend kindgemäß vorbereitet. Hierdurch kommt es gleich zu Beginn des Lernweges „Mathematik" für einen großen Teil der Kinder zu folgenschweren Erfahrungen. Sie sind überfordert, weil von ihnen immer wieder ein Denken verlangt wird, zu dem ihnen noch die nötigen Voraussetzungen fehlen – beispielsweise Zählen, Addieren, Subtrahieren, Schreiben von Zahlen usw. Während sie über die Lösung einer schwierigen Aufgabe nachdenken sollen, kämpfen viele Kinder gleichzeitig mit fehlenden Grundfertigkeiten.

Hinzu kommt, dass Aufgaben in gängigen Schulbüchern oft selbst von Erwachsenen nur schwer oder gar nicht verstanden werden. Viele Kinder, die mit ihrem ganzen Herzen den Forderungen der Erwachsenen nachkommen wollen, dies aber nicht schaffen, verzweifeln in dieser Situation. Oft reichen nur wenige Minuten bis Stunden aus, damit ein Kind versucht, sich dauerhaft der Mathematik zu entziehen – oft bis zum Ende der Schulzeit und darüber hinaus.

Das IntraActPlus-Konzept macht die Lernwege in Mathematik angenehm und passend leicht – in jedem Augenblick für jedes Kind. Hierdurch werden Kinder erfolgreich und motiviert, denn **Erfolg ist der stärkste Motivator**. Dies gilt auch für Kinder mit einer mathematischen Hochbegabung. Auch sie lernen mit dem vorliegenden Material schneller.

Vom Kopf auf die Füße – Das IntraActPlus-Konzept dreht die üblichen Lernwege für Mathematik vollständig um

Das IntraActPlus-Konzept dreht die üblichen Lernwege für Mathematik vollständig um. Die gegenwärtig gängigen Schulbücher nutzen Denkaufgaben, um Grundfertigkeiten zu üben – mit der Folge von abrupten und zu hohen Schwierigkeitssprüngen, die viele Kinder immer wieder scheitern lassen.

In dem vorliegenden Übungsmaterial sind die Schwierigkeitssprünge an allen Stellen klein. Hierdurch wird jedes Kind immer sorgfältig auf den nachfolgenden Lernschritt vorbereitet. **Die Kinder werden zum Denken hingeführt und sie werden auf das Denken vorbereitet, indem sie die erforderlichen Grundfertigkeiten zunächst außerhalb von Denkaufgaben lernen dürfen.**

Warum ist es so wichtig, vor den eigentlichen Denkaufgaben erforderliche Grundfähigkeiten wie Zählen, Addieren, Subtrahieren oder Schreiben von Zahlen sicher aufzubauen? Der wichtigste Grund ist die extrem geringe Kapazität des Arbeitsgedächtnisses.

Das Arbeitsgedächtnis ist äußerst begrenzt und begrenzt damit das Denken

In der Grundlagenforschung werden zwei grundsätzlich verschiedene Gedächtnisformen unterschieden – das Arbeitsgedächtnis und das Langzeitgedächtnis. Das Arbeitsgedächtnis ist zuständig für die Organisation von Denkprozessen und für das Erleben von Bewusstheit. Nur Inhalte, die sich im Arbeitsgedächtnis befinden, können bewusst sein.

Bewusstes mathematisches Denken findet immer mithilfe und unter Leitung des Arbeitsgedächtnisses statt. Anders ausgedrückt: Ohne das Arbeitsgedächtnis gibt es kein mathematisches Denken. Das wäre nicht erwähnenswert, wenn dieses Gedächtnissystem nicht eine Besonderheit hätte: Es kann nur eine begrenzte Anzahl von Elementen gleichzeitig speichern bzw. verarbeiten:

- Beim Erwachsenen durchschnittlich etwa sieben Elemente (Miller 1956)
- Bei sechsjährigen Kindern durchschnittlich etwa vier Elemente (Dempster 1981)

Diese Begrenzung ist auch durch Training nicht aufhebbar und nimmt einen entscheidenden Einfluss auf die Fähigkeit zu denken. Werden für einen Denkprozess mehr Elemente benötigt, als das Arbeitsgedächtnis gleichzeitig fassen kann, bricht der Denkprozess zusammen.

Ein solcher Zusammenbruch des Denkens ist der häufigste Grund, warum Kinder die Beschäftigung mit Mathematik aufgeben. Sie machen die Erfahrung, dass sie die entsprechende Aufgabe nicht lösen können. Gleichzeitig entsteht hierdurch ein unangenehmes Gefühl, das sich an den Lerninhalt „Mathematik" koppelt. Je nach Stärke und Häufigkeit solcher unangenehmer Erfahrungen vermeiden es diese Kinder dann zeitlich begrenzt oder dauerhaft, sich mit Mathematik zu beschäftigen. Ein Teufelskreis beginnt: Vermeiden – Misserfolg – Vermeiden.

Jedes Kind verfügt grundsätzlich über die Fähigkeit, einen solchen Teufelskreis zu verhindern. Der Grund hierfür ist einfach: Die Evolution hat Lösungen für das Problem der Begrenzung des Arbeitsgedächtnisses gefunden. Jedem Kind ist also die Möglichkeit gegeben, die Nachteile der geringen Kapazität des Arbeitsgedächtnisses auszuglei-

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2020

chen und mathematisches Denken zu erlernen – vorausgesetzt, die Kinder dürfen andere Lernwege verwenden als die gegenwärtig in Schulbüchern gebräuchlichen.

Unsere genetische Ausstattung ermöglicht es, ausnahmslos jeden Teil eines Denkprozesses aus dem Arbeitsgedächtnis auszulagern und in das Langzeitgedächtnis zu verlegen. Hierdurch wird die Anzahl der Elemente im Arbeitsgedächtnis verringert. Nur mithilfe solcher Verlagerungen können Kinder und Erwachsene letztlich erfolgreich mathematisch denken – auch Mathematiker. Wir möchten dies an drei Beispielen verdeutlichen, dem Schreiben der Ziffer »4«, einer üblichen Denkaufgabe und einer Sachaufgabe.

Wenn ein Kind lernt, eine neue Ziffer, wie beispielsweise die »4«, zu schreiben, muss es zunächst viele Informationen im Arbeitsgedächtnis behalten. Anfangs ist bei vielen Kindern das Arbeitsgedächtnis mit einer einzigen Ziffer vollkommen ausgelastet, denn das Kind muss sich unter anderem merken, wo es auf der Seite zu schreiben beginnt, welcher Strich als Erstes gemacht wird, in welchem Winkel dann der nächste Strich angesetzt wird und wie lang dieser werden soll, welcher Strich dann an dritter Stelle folgt, wie die Finger auf den Stift gelegt werden müssen und welcher Druck auf den Stift ausgeübt werden soll.

Viele Kinder müssen sich dabei so anstrengen, dass ihnen ihre Anstrengung buchstäblich ins Gesicht geschrieben steht. Manche von ihnen verspannen den Schulter- und Mundbereich, und ihre Zunge arbeitet beim Schreiben mit.

Jeder, der Kinder in solchen Situationen wirklich wahrnimmt, wünscht sich, dass ein Kind zunächst die Ziffer »4« so sicher lernen darf, dass es sie mühelos schreiben kann, bevor es auf die nächste Schwierigkeit zugeht oder die Ziffer »4« sogar in einer schwierigen Aufgabe erscheint, beispielsweise »3+1=?«. Mit zunehmendem Üben wird der gesamte Denkprozess, der zum Schreiben der »4« erforderlich ist, vom Arbeitsgedächtnis in das Langzeitgedächtnis übertragen. Ist dieser Prozess vollständig abgeschlossen, macht es keine Mühe mehr, die »4« zu schreiben.

Kindern lernen auf Dauer viel lieber, wenn sie jeden einzelnen Schritt so oft üben dürfen, bis er leicht aus dem Langzeitgedächtnis abrufbar ist, bevor es schwieriger wird. Der Grund hierfür ist einfach: Bei einem zu schnellen Voranschreiten von einer Aufgabe zu nächsten kommt es zu häufig zu einer Überlastung des Arbeitsgedächtnisses und damit zu Misserfolgen. Das Arbeitsgedächtnis kann die vielen einzelnen Punkte nicht mehr behalten, seine Kapazitätsgrenze wird zu häufig überschritten. Das macht das Lernen dauerhaft zu anstrengend und senkt die Motivation.

Auch Kinder, die sich beim Lernen leichttun, profitieren davon, wichtige Lernschritte sicher lernen zu dürfen. Sie lernen dadurch insgesamt schneller. Überlernen von wichtigen Lernschritten führt grundsätzlich zu schnellerem Lernen. Aber nicht nur das. Auch die Qualität des Wiedergebens steigt, beispielsweise bei Klassenarbeiten. Dies gilt für alle Lerninhalte.

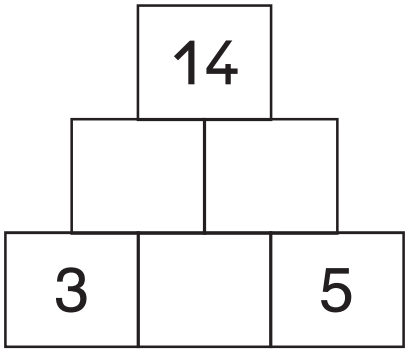

Abb. 1 *Eine solche Denkaufgabe ist für diejenigen Kinder extrem schwierig, die nicht über die erforderlichen Grundfertigkeiten wie das Schreiben von Ziffern und das Abrufen grundlegender Rechenergebnisse aus dem Langzeitgedächtnis verfügen.*

Die in Abb. 1 dargestellte Rechenmauer ist ein beliebter Aufgabentyp, der auch im vorliegenden Lernmaterial vorkommt. Für Kinder, die die grundlegenden Rechenergebnisse mühelos aus dem Langzeitgedächtnis abrufen können, lassen sich mit diesem Aufgabentypus sinnvolle Denkaufgaben erstellen. Für Kinder, denen die erforderlichen Grundfertigkeiten fehlen, können die gleichen Aufgaben zu einer äußerst unangenehmen Herausforderung werden. Dies hat folgenden Grund: Um entsprechende Aufgaben zu lösen, ist es sinnvoll, Proberechnungen vorzunehmen. Werden diese mit Leichtigkeit durchgeführt, macht eine Denkaufgabe Spaß. Wenn Proberechnungen jedoch zum Teil noch mit den Fingern gerechnet werden müssen, stellt sich bald aufgrund der zu vielen Elemente, die im Arbeitsgedächtnis gehalten werden müssen, eine große Unlust und Überforderung ein. Dies hat zur Folge, dass sich Kinder mathematischen Inhalten entziehen wollen, statt sich mit ihnen zu beschäftigen.

Es kommt also immer darauf an, mit welchen Grundfertigkeiten ein Kind Denkaufgaben lösen muss. Denkaufgaben selbst sind grundsätzlich nicht dazu geeignet, Grundfertigkeiten aufzubauen, auch wenn das in gängigen Schulbüchern anders gesehen wird. **Schulbücher, die Kinder nicht ausreichend auf Denkaufgaben vorbereiten und immer wieder zu hohe Schwierigkeitssprünge vornehmen, sind weder kindgemäß noch effektiv, um Kinder zum mathematischen Denken zu führen.**

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2020

Betrachten wir als drittes Beispiel die folgende Sachaufgabe:

Herr Mayer möchte einen Tisch für 247 € und einen Sessel für 119 € kaufen. Er hat einen Einkaufsgutschein über 30 € und 325 € Bargeld. Reicht sein Geld?

Mit den Informationen, die in dieser Sachaufgabe gegeben werden, ist das Arbeitsgedächtnis der meisten Kinder vollkommen ausgelastet. Kommen durch das Rechnen selbst zusätzliche Anforderungen hinzu, kann dies schnell zur Überforderung führen. Solche zusätzlichen Anforderungen können beispielsweise sein:

- Das Kind muss überlegen, wie es mehrstellige Zahlen schriftlich addiert.
- Das Kind braucht für das schriftliche Addieren eine hohe Aufmerksamkeit, um keinen Fehler zu machen, beispielsweise keinen Übertrag zu vergessen.
- Das Kind muss überlegen, wie es mehrstellige Zahlen schriftlich subtrahiert.
- Das Kind braucht für das schriftliche Subtrahieren eine hohe Aufmerksamkeit, um keinen Fehler zu machen.

Noch weitere zusätzliche Anforderungen kommen auf diejenigen Kinder zu, die bereits mühsam nachdenken müssen, wenn sie einstellige Zahlen addieren oder subtrahieren müssen. Wenn sie angestrengt überlegen, wie viel beispielsweise »7 + 9« ist, ist ihr Arbeitsgedächtnis in hohem Maße beansprucht. Aus dieser Sicht ist es mehr als verständlich, dass Kinder ohne sicher überlernte Grundfertigkeiten und sicher abrufbare Rechenergebnisse an entsprechenden Sachaufgaben verzweifeln.

In der Praxis zeigt sich, dass die Lernwege der gängigen Mathematikbücher dann am wenigsten Schaden anrichten, wenn Eltern ihre Kinder im mathematischen Bereich unterstützen. Diese Eltern üben mathematische Grundfertigkeiten bereits vor Schulbeginn. Die Kinder kommen damit gut vorbereitet in die Schule. Zum anderen üben viele Eltern mit ihren Kindern – parallel zur Schule – mathematisches Denken. Deshalb decken auch die PISA-Studien immer wieder auf, dass der Schulerfolg in Deutschland im Wesentlichen von der Herkunftsfamilie abhängig ist.

Die gängigen Mathematikschulbücher behindern nicht nur das Denken, sondern auch das Speichern der Lerninhalte

Naturwissenschaftlich Denkende stimmen der folgenden Aussage unmittelbar zu: „Was ich nicht gespeichert habe, habe ich nicht gelernt.“ Andere brauchen vielleicht etwas mehr Zeit, bis auch sie die Aussage bestätigen. Wer sich die Aussage bewusst macht, erkennt ihre Radikalität: **Das Speichern von Rechenwegen und Rechenergebnissen muss ein zentraler Wert oder ein zentrales Ziel im Zusammenhang mit mathematischen Inhalten sein.** Diese Sichtweise wird durch die bisherigen Ausführungen zu mathematischem Denken noch weiter unterstrichen. Es wurde aufgezeigt, dass mathematisches Denken unauflösbar mit der Verlagerung von Denkprozessen in das Langzeitgedächtnis zusammenhängt. Rechenwege und Rechenergebnisse müssen dauerhaft gespeichert werden.

In diesem Zusammenhang ist Folgendes wichtig: **Die Fähigkeit zu speichern kann trainiert werden.** Sie verhält sich wie ein Muskel. Je mehr man sie übt, desto stärker und verlässlicher wird sie. Das vorliegende IntraActPlus-Material unterstützt daher die Speicherfähigkeit in einer ungewohnten Weise. Das gesamte Material ist so konstruiert, dass sehr viel mehr wiederholt wird als in allen gegenwärtig gängigen Schulbüchern. Wie dieses Wiederholen aussehen kann, zeigen u. a. die Videoaufzeichnungen unter www.intraactplus.de/mathe/.

Wie grundlegend wichtig das Speichern ist, zeigt auch die folgende Studie: Price, Mazzocco und Ansari (2013) gingen der Fragestellung nach, worin sich erfolgreiche und weniger erfolgreiche Schüler im Bereich der Mathematik unterscheiden. Sie stellten fest, dass erfolgreiche Schüler Rechenergebnisse speichern. Weniger erfolgreiche Schüler tun dies nicht oder in weitaus geringerem Maße.

Erfolgreiche Schüler arbeiten nicht nur Rechenaufgaben durch und schreiben das Ergebnis auf. Sie speichern das Ergebnis auch. Hierdurch brauchen sie das Ergebnis in Zukunft nicht immer wieder neu zu berechnen, sondern können es sofort nennen. **Erfolgreiche Kinder speichern, weniger erfolgreiche rechnen immer wieder neu.** Das IntraActPlus-Konzept unterstützt Kinder in ungewöhnlicher Weise darin, speichern zu wollen und speichern zu können.

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2020

Eine Studie von Grabner et al. (2009) zeigt nochmals die Vorteile auf, Ergebnisse von Aufgaben direkt zu speichern, anstatt die Ergebnisse jedes Mal wieder neu zu errechnen (Abb. 2).

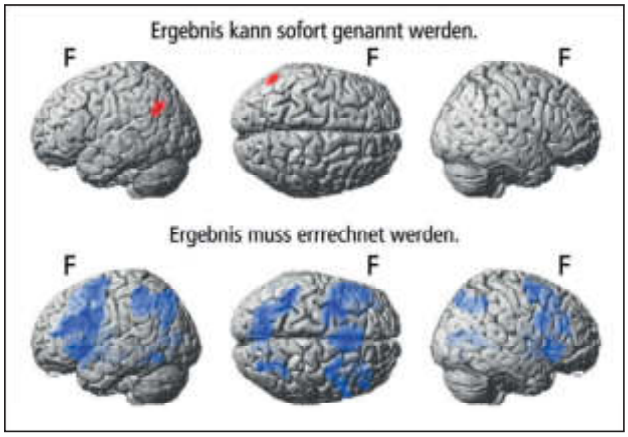

Abb. 2 *Unterschiede der Hirnaktivität bei unterschiedlichen Lösungswegen von Rechenaufgaben. F: Frontalkortex. (Aus: Grabner et al. 2009).*

Wenn die Versuchsteilnehmer in der Lage sind, das Ergebnis einer Rechenaufgabe einfach aus dem Gedächtnis abzurufen, zeigt sich in ihrem Gehirn nur eine geringe Aktivierung (obere Reihe, der aktive Bereich des Gehirns ist rot dargestellt). Dies ist ein Zeichen dafür, dass die Leistung ohne viel Mühe und Anstrengung erbracht wird. Wie aus Abb. 2 ersichtlich wird, kann in diesem Fall auch keine Aktivierung des Frontalkortex beobachtet werden. Dies bedeutet, dass das Arbeitsgedächtnis nicht belastet wird. Es ist frei für höhere Denkprozesse.

Vollkommen anders sieht es aus, wenn die Versuchspersonen das Ergebnis neu mithilfe einzelner Rechenoperationen erarbeiten. In diesem Fall sind große Bereiche des Gehirns aktiv (untere Reihe, blau dargestellt). Besonders problematisch ist die hohe Aktivität im Frontalkortex. Dies zeigt, dass das Arbeitsgedächtnis belastet wird und entsprechend weniger für andere Denkprozesse zu Verfügung steht, beispielsweise um die wesentlichen Informationen einer Sachaufgabe festzuhalten und sinnvoll miteinander zu verknüpfen.

Der richtige Lernweg – was steht noch auf dem Spiel?

Eigensteuerung und Persönlichkeitsentwicklung

In unserer jahrzehntelangen therapeutischen Arbeit konnten wir immer wieder feststellen, wie tief die negativen Erfahrungen von Kindern mit Misserfolgen in Mathematik reichen. Es bleibt meist nicht nur bei dem unguten Gefühl gegenüber der Mathematik und den beständigen Versuchen, diesem Schulfach auszuweichen. Es geht in der Regel tiefer. Eine negativere Selbsteinschätzung und mangelnde Selbstsicherheit sind eher die Regel als die Ausnahme. Zudem können Schwierigkeiten im späteren Berufsleben auftreten. So ist beispielsweise das Fach „Statistik“ einer der wichtigsten Gründe, warum Studierende der Psychologie und Betriebswirtschaft ihr Studium abbrechen. Auch Facharbeiterinnen und Facharbeiter müssen sich in ihrer Ausbildung wieder mit Mathematik beschäftigen. Ob sie ihr mit Spaß begegnen oder nicht, entscheidet dann abermals über Wohlfühlen und Erfolg und damit ein gutes Stück Lebensqualität.

Ein guter Start in die Welt der Mathematik ist jedoch nicht nur für das einzelne Kind wichtig, sondern auch für eine zukünftige, wissensbasierte Gesellschaft. Nur wenn bei genügend vielen Bürgerinnen und Bürgern eine ausreichende mathematische Kompetenz vorhanden ist, kann eine Gesellschaft im Rahmen der Globalisierung erfolgreich handeln.

Selbstbestimmte und informierte Bürger

Zeitungen, Bücher und Beiträge in den Medien können oft nur diejenigen richtig verstehen, die die Grundlagen der Entscheidungstheorie, Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischer Verteilungsmodelle sicher beherrschen. Wer Studien der Grundlagenforschung selber lesen und sich hier autonom und selbstbestimmt informieren möchte, muss die zugrunde liegende Statistik beherrschen, andernfalls ist er im wahrsten Sinne des Wortes abhängig. Zur freien und selbstbestimmten Meinungsbildung gehört der unbegrenzte Zugriff auf Information. Um diese Informationen wirklich nutzen zu können, benötigt man im Einzelfall ein gehöriges Maß an mathematischem Verständnis.

Erfolgreiche Bewältigung des Alltags

Auch zur Bewältigung des normalen Alltags ist mathematisches Verständnis elementar. Beispielsweise würden sich viele Menschen nicht so hoch verschulden, wenn sie den exponentiellen Charakter von Zins und Zinseszins wirklich verstünden. Manch ein Journalist würde seine Kritik gegenüber Fußballtrainern anders formulieren, beherrschte er die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Weniger Start-up-Unternehmen und Selbstständige gerieten in finanzielle Notlagen, läge eine ausreichende mathematische Kompetenz vor, durch die sie Geschäftseinnahmen und daraus resultierende Gewinne voneinander unterscheiden könnten. Buchhalterinnen und Buchhaltern würden grobe Fehler sehr viel schneller auffallen, könnten sie bauchmäßig sicher und schnell Rechnungsbeträge überschlagen. Beim falschen Setzen eines Dezimalkommas hilft auch der beste Computer oder Taschenrechner nicht. Auch Spielcasinos und Spielhallen dürften sicherlich weniger Zulauf haben, wenn mehr Erwachsene die oft verschwindend geringe Wahrscheinlichkeit eines Gewinns wirklich verstanden hätten.

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2020

Das vorliegende Lernmaterial zur Mathematik ist nur ein Teil des Ganzen

Wer Erfolg hat, denkt positiver. Wer wenig oder keinen Erfolg hat, denkt negativer. Aus diesem Grund beeinflusst ein Lernmaterial nicht nur die Gefühle, sondern auch die Eigensteuerung und damit die Persönlichkeitsentwicklung. Das vorliegende Lernmaterial für Mathematik ist jedoch nur einer der Bausteine zur Förderung von Eigensteuerung und Persönlichkeit. Wir haben im Rahmen des IntraActPlus-Konzepts aus dem riesigen Wissensschatz der Grundlagenforschung Trainingswege entwickelt, wie Bezugspersonen durch ihr eigenes Verhalten auf die Entwicklung von Eigensteuerung und Persönlichkeitsentwicklung von Kindern Einfluss nehmen können. Eltern, Lehrerinnen und Lehrer, Therapeutinnen und Therapeuten, die sich hierzu Wissen und Handlungskompetenz aneignen wollen, können dies über folgende Quellen tun:

- Die DVD zum schnellen Einstieg: *In jedem Fach eine Note besser* (Jansen und Streit 2015)
- Das Fachbuch: *Positiv lernen* (Jansen und Streit 2006)
- Das leichter zu lesende Buch: *Erfolgreich erziehen* (Jansen und Streit 2010)

Lesen können hilft auch in der Mathematik

Die vorliegenden Mathematikmaterialien enthalten immer wieder schriftliche Hilfen und Erklärungen. Jedes Kind tut sich deshalb mit den vorliegenden Materialien leichter, wenn es lesen kann. Wer möchte, dass sein Kind ungewohnt schnell lesen lernt, kann auf den Lehrgang *Lesen und Rechtschreiben lernen nach dem IntraActPlus-Konzept* (Jansen, Streit und Fuchs 2012) zurückgreifen. Kinder mit normaler Intelligenz können in 10–14 Wochen(!) lesen lernen. Der Grund hierfür ist einfach: Auch dieses Lernmaterial wurde auf Basis gesicherter Erkenntnisse der Grundlagenforschung entwickelt und durch eingehende Testung im schulischen und therapeutischen Alltag an schwächere, normal- und hochbegabte Kinder angepasst.

Was noch wichtig ist

Vermeiden Sie zu viele Fehler beim Lernen

In unzähligen wissenschaftlichen Studien wurde gezeigt, dass Fehler bzw. Fehlverhalten gespeichert werden und dies den Lernprozess verlangsamt. Zunächst das Wichtigste: Fehler sollen nicht emotional bewertet werden. Kinder sollen also Fehler machen können, ohne sich dabei schlecht zu fühlen, weil Fehler eben beim Lernen geschehen. **Das vorliegende Lernmaterial wurde jedoch so gestaltet, dass kaum Fehler gemacht werden. Dadurch können Kinder nicht nur schneller lernen. Das Lernen selber fühlt sich auch besser an – für alle.**

Üben Sie Grundlegendes bis zur Automatisierung

Wie gezeigt, muss es das Ziel sein, Rechenergebnisse und Lösungswege im Langzeitgedächtnis zu speichern. Es gibt nun unterschiedliche Qualitäten einer solchen Speicherung:

Zu Beginn eines Lernprozesses erfordert der Abruf aus dem Langzeitgedächtnis immer noch eine gewisse Kapazität. Mehrere Elemente des Arbeitsgedächtnisses werden benötigt, um die Inhalte im Langzeitgedächtnis aufzufinden und in das Arbeitsgedächtnis zu holen. Damit steht dem eigentlichen Denkprozess nicht mehr das ganze Arbeitsgedächtnis zur Verfügung. Bewusstes Denken wird hierdurch beschränkt.

Wird ein Lerninhalt weiter sehr viel wiederholt, und werden dabei nur wenige Fehler gemacht, kommt es zu einer qualitativen Veränderung. Jetzt laufen ganze Teile des Denkens im Langzeitgedächtnis selbst ab. Der Fachbegriff hierfür ist Automatisierung. Dies ist die höchste Qualitätsstufe. Nun wird für die nötigen Verarbeitungsschritte überhaupt keine Kapazität des Arbeitsgedächtnisses mehr benötigt. Es steht damit in vollem Umfang für höheres Denken zur Verfügung.

Die Automatisierung eines Denkprozesses bedeutet gleichzeitig einen massiven Umbau des Gehirns. Dieser Umbau ist nicht genetisch bedingt, sondern er entsteht über den richtigen Lernweg. **Weil automatisierte Denkprozesse das Arbeitsgedächtnis überhaupt nicht belasten, ist Automatisierung die wichtigste Voraussetzung für den Erfolg im Fach Mathematik.**

Ein Beispiel für die Automatisierung: Zahlen schreiben

Das Schreiben von ein- und mehrstelligen Zahlen ist ein typisches Beispiel für eine Fertigkeit, die automatisiert werden sollte. Automatisierung tritt nur dann ein, wenn die beiden folgenden Bedingungen gleichzeitig eingehalten werden (Schneider und Shiffrin 1977, Shiffrin und Schneider 1977):

1. Es wird sehr viel wiederholt.
2. Ein Reiz wird immer mit dem gleichen Verhalten beantwortet, bzw. es wird möglichst fehlerfrei gelernt.

Die zweite Bedingung wird immer dann verletzt, wenn das Kind eine Ziffer unterschiedlich schreibt, beispielsweise die »1« einmal von oben nach unten und einmal von unten nach oben. Je häufiger gegen die zweite Bedingung verstoßen wird, desto länger dauert es bis zur Automatisierung. Ab einem bestimmten Punkt, also bei zu häufigem unterschiedlichem Schreiben, ist eine Automatisierung nicht mehr möglich. Das hat fatale Auswirkungen: Die betroffenen Kinder müssen immer wieder bewusst überlegen, wie man die Ziffern schreibt. Dies fordert Kapazitäten des

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2020

Arbeitsgedächtnisses, die dann nicht mehr für die eigentlichen mathematischen Inhalte zur Verfügung stehen.

Achten Sie daher beim Üben mit dem vorliegenden Material darauf, dass die Ziffern immer in der Richtung geschrieben werden, die die Pfeile vorgeben. Das ist der schnellste Weg zur Automatisierung. Damit alle Kinder ausreichend viel wiederholen können, um den Schreibablauf zu automatisieren, können die Übungsblätter zum Zahlenschreiben auch im Internet unter www.intraactplus.de/mathe/ heruntergeladen und wiederholt bearbeitet werden.

Eine besondere Herausforderung ist für viele Kinder das **Schreiben mehrstelliger Zahlen**. Hier gibt es im Deutschen eine besondere Schwierigkeit. Wir sprechen die Ziffern nicht in der Reihenfolge, die ihrem Stellenwert, d. h. ihrer Position entspricht. Wenn wir beispielsweise „Dreihunderteinundzwanzig" sprechen, nennen wir erst die Hunderter, dann die Einer und zuletzt die Zehner.

Wenn Kinder beginnen, zweistellige Zahlen zu schreiben, so schreiben sie meist zunächst die Einer, weil sie diese zuerst hören und erst dann die Zehner, z. B. bei der Zahl »21« zuerst die »1« und dann die »2« links daneben. Dieser Weg, von rechts nach links zu schreiben, ist zunächst der einfachere Weg.

Beim späteren Schreiben von größeren Zahlen ist dieser Weg weniger günstig, da ständig die Schreibrichtung gewechselt wird. Er funktioniert erst recht nicht mehr, wenn Zahlen in Tastaturen eingegeben werden.

Unter dem Gesichtspunkt der Automatisierung empfehlen wir daher, bei mehrstelligen Zahlen von Anfang an die Schreibrichtung von links nach rechts zu üben. Dies kostet am Anfang mehr Zeit, ist aber langfristig effektiver, damit die Kinder später nicht immer wieder nachdenken müssen, ob sie eine mehrstellige Zahl von links nach rechts oder von rechts nach links schreiben.

Üben Sie kein Simultanerfassen, sondern genaues Zählen

Nehmen wir an, vor Ihnen stünde ein Teller mit 5 Trauben. Sicher können Sie die Anzahl »5« sehr schnell nennen. Weil dies bei kleineren Mengen so einfach ist, haben Erwachsene oft das Gefühl, die einzelnen Elemente simultan, d. h. gleichzeitig wahrzunehmen. Sie meinen, „auf einen Blick" zu sehen, wie viele Trauben es sind, statt zu zählen. Tatsächlich zählen jedoch auch Erwachsene bei ungeordneten Mengen aus mehr als 3 Elementen (vgl. Abb. 3). Bei ihnen ist jedoch das Abzählen so automatisiert, dass es ohne Aufmerksamkeitszuwendung blitzschnell und mühelos geschieht. Dadurch entsteht das subjektive Gefühl des „Simultanerfassens".

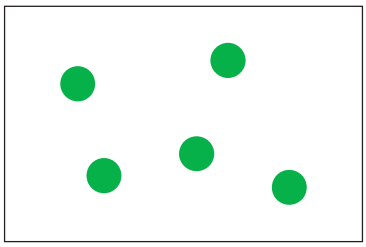

Abb. 3 *Menge aus ungeordneten Elementen. Um hier die Anzahl zu erfassen, müssen auch Erwachsene zählen.*

Dass dies so ist, zeigt Abb. 4. Sie stammt von Dehaene, einem führenden Neurowissenschaftler, der sich umfassend mit dem Gebiet des mathematischen Denkens beschäftigt. Die von Dehaene grafisch dargestellten Ergebnisse aus der Studie von Mandler und Shebo (1982) wurden durch sehr viele andere Studien bestätigt und gelten daher als gesichertes Wissen.

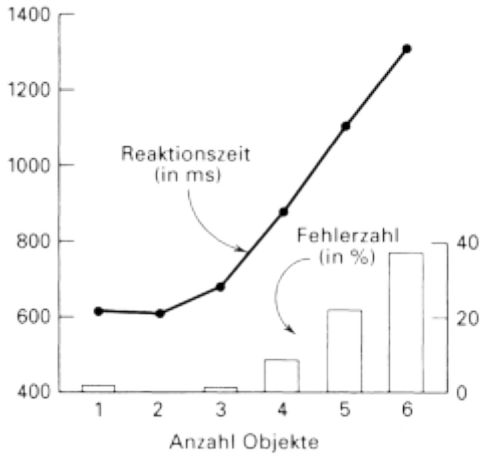

Abb. 4 *Reaktionszeit und Fehlerzahl beim Erfassen von Mengen. Die Versuchsteilnehmer sahen auf einem Bildschirm unterschiedliche Mengen zufällig angeordneter Elemente und sollten so schnell wie möglich deren Anzahl benennen. (Aus: Dehaene 1999; nach Mandler und Shebo 1982).*

In Abb. 4 lässt sich erkennen:

- Bis zu einer Anzahl von drei Elementen nimmt die Reaktionszeit nur wenig zu. Dies bedeutet, dass wir bis zu drei Elemente nahezu gleichzeitig (simultan) erfassen können. Erstaunlicherweise gilt dies sogar für Säuglinge und manche Tiere (vgl. Dehaene 1999).
- Ab vier Elementen erhöht sich die Reaktionszeit für jedes hinzukommende Element um 200–300 Millisekunden (ms). Ein solcher Verlauf der Reaktionszeiten bedeutet immer, dass Elemente nicht simultan, sondern nacheinander verarbeitet werden. Erwachsene zählen also auch. Dies passiert jedoch automatisch, sodass sie es meist nicht bewusst wahrnehmen.

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2020

– Die Simultanerfassung von Mengen ist selbst bei Erwachsenen sehr ungenau. Wie man in Abb. 4 sieht, beträgt die Fehlerquote bei fünf Elementen etwa 20 % und bei sechs Elementen fast 40 %!

Obwohl also auch Erwachsene ungeordnete Mengen ab vier Elementen nicht simultan erfassen, wird dennoch oft mit Kindern „Simultanerfassen“ geübt. Man zeigt ihnen beispielsweise eine Gruppe von Punkten wie in Abb. 3, und sie sollen die Anzahl schnell und ohne zu zählen benennen. Dies ist aus folgenden Gründen ungünstig:

– Den Kindern wird ein Weg vermittelt, der sehr fehleranfällig ist. Das ist eine schlechte Voraussetzung für genaues Rechnen!
– Die Kinder werden davon abgehalten, Mengen genau abzuzählen und dabei jedes Element der Menge bewusst wahrzunehmen. Dieses genaue und anfangs oft ganz langsame Abzählen ist extrem wichtig. Nur so kann das Zählen automatisieren und sicher und mühelos werden.

Halten Sie ein Kind von Anfang an dazu an, immer genau zu zählen und das Zählen wichtig zu nehmen. Auf diese Weise hat es das Zählen bald automatisiert und kann dann Mengen schnell, mühelos und sicher erfassen. Dies ist eine grundlegende Voraussetzung für das Mathelernen. Alle Kinder, die noch nicht sicher und mühelos zählen können, sollten daher mit Kap. 1.1 beginnen. Wer schon sicher und mühelos zählen kann, beginnt mit Kap. 1.2.

Gängige Schulbücher behindern den Aufbau einer inneren Vorstellung des Zahlenraums

Eine sichere und schnell abrufbare innere Vorstellung des Zahlenraums (zunächst bis 10, dann 20, 100 usw.) ist eine grundlegende Voraussetzung für das Rechnen. Je sicherer Kinder Zahlen im Zahlenraum finden, desto besser können sie sowohl Rechenergebnisse abrufen als auch komplexere mathematische Probleme lösen (Zhu et al. 2017). Im späteren Leben können Menschen mit einer sicheren inneren Vorstellung des Zahlenraums beispielsweise die Risiken finanzieller Entscheidungen besser abschätzen (Park und Cho 2018). Es lohnt sich also, in diesen Bereich ausreichend Zeit zu investieren.

Warum fällt es so vielen Kindern schwer, eine sichere innere Vorstellung des Zahlenraums aufzubauen? Ein ganz wichtiger Grund sind ständig wechselnde Darstellungen in den gängigen Schulbüchern, beispielsweise:

– Fähnchen an einer Wäscheleine
– Balken für die Zehner, Würfelchen für die Einer
– Eier in Zehnerkartons
– Die 100 als fortlaufender Zahlenstrahl.
– Das Hunderterfeld in 10er-Reihen untereinander

Diese unterschiedlichen Darstellungen machen es vielen Kindern unnötig schwer, ein inneres Modell des Zahlenraums zu entwickeln. Da sie noch kein abstraktes inneres Modell des Zahlenraums haben, ist für sie die Wäscheleine etwas ganz anderes als die als Balken und Klötzchen dargestellten Zahlen.

Der schnellste Weg, ein inneres Modell des Zahlenraums aufzubauen, besteht darin, **immer die gleiche bildliche Darstellung zu verwenden und mit dieser möglichst häufig zu üben.** Diesem Weg folgt das vorliegende Material.

Literatur

– Dehaene S (1999) Der Zahlensinn oder Warum wir rechnen können. Basel: Birkhäuser
– Dempster FN (1981) Memory span: Sources of individual and developmental differences. Psychol Bull 89(1), 63–100
– Grabner RH, Ansari D, Koschutnig K, Reishofer G, Ebner F, Neuper C (2009) To retrieve or to calculate? Left angular gyrus mediates the retrieval of arithmetic facts during problem solving. Neuropsychologia 47(2), 604–608
– Jansen F, Streit U (2006) Positiv Lernen. 2. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer
– Jansen F, Streit U (2010) Erfolgreich erziehen: Kindergarten- und Schulkinder. 6. Aufl. Frankfurt a. M.: Krüger/Fischer
– Jansen F, Streit U (2015) In jedem Fach eine Note besser. Die besten Lerntechniken für den Schulerfolg. [DVD]. München: Riva-Verlag
– Jansen F, Streit U, Fuchs A (2012) Lesen und Rechtschreiben lernen nach dem IntraActPlus-Konzept. 2. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer
– Mandler G, Shebo BJ (1982) Subitizing: an analysis of its component processes. J Exp Psychol Gen 111(1), 1–22
– Miller GA (1956) The magical number seven, plus or minus two: some limits on our capacity for processing information. Psychol Rev 101(2), 343–352
– Park I, Cho S (2018) The influence of number line estimation precision and numeracy on risky financial decision making. Int J Psychol. doi: 10.1002/ijop.12475
– Price GR, Mazzocco MM, Ansari D (2013) Why mental arithmetic counts: brain activation during single digit arithmetic predicts high school math scores. J Neurosci 33(1), 156–163
– Schneider W, Shiffrin RM (1977) Controlled and automatic human information processing: I. Detection, search, and attention. Psychol Rev 84, 1–66
– Shiffrin RM, Schneider W (1977) Controlled and automatic human information processing: II. Perceptual learning, automatic attending, and a general theory. Psychol Rev 84, 127–190
– Zhu M, Cai D, Leung AWS (2017) Number line estimation predicts mathematical skills: Difference in grades 2 and 4. Front Psychol 8, 1576. doi: 10.3389/fpsyg.2017.01576

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2020